מטריצה של מכפלה פנימית(מטריצת Gram)

# הגדרה

יהיו V עם ו בסיס. נגדיר מטריצת Gram (של ביחס לS) ע"י:  
 כלומר

## דוגמה

1. , מכפלה סטנדרטית, בסיס, אזי כי
2. אם V, וS בסיס א"נ(אוטונורמלי) אזי

# משפט

יהיו V, , בסיס ו מטריצת Gram(של ביחס לS). לכל :

## הוכחה

**תרגיל**: להוכיח

## הערות

1. היא מטריצה יחידה כך ש לכל
2. :
3. לא כל מטריצה שמקיימת את 2 מגדירה מכפלה פנימית. לדוגמה: (או ) איננה מטריצת Gram של מכפלה פנימית.

# משפט

יהיו V, , בסיסים וM מטריצת מעבר מS ל. אזי מתקיים

## הוכחה

לכל מתקיים:

# הגדרה

יהי מטריצה. נסמן ב(צמוד הרמיטי – מסמנים גם )

שתי מטריצות נקראות חופפות אם קיימת מטריצה M לא סינגולרית כך ש

## דוגמה

שתי מטריצות Gram של אותה הם חופפות:

# משפט

כל מטריצת Gram היא חופפת למטריצת היחידה:  
V, , בסיס ו מטריצת Gram אזי קיימת M לא סינגולרית כך ש:

## הוכחה

לפי Gram-Shmidt קיים בסיס א"נ. מתקיים: . אם מטריצת מעבר מS לB אזי .

## הערה

אפשר לבחור M משולשת עליונה.

יהי V מ"ו ו בסיס. יהי . נתבונן ב מוגדרת ע"י

## הערה

לינארי

## תרגיל

סימטרי/הרמיטי אם A סימטרית\הרמיטית.

# הגדרה

A סימטרית\הרמיטית נקראת חיובית לחלוטין אם לכל

## הערה

1. A הרמיטית נקראת חיובית אם לכל
2. אם (=חיובית לחלוטין) אזי (הרמיטית ⇦ )  
    כי   
   אבל זה לא מספיק כדי שהמטריצה תהייה חיובית לחלוטין. תרגיל: לתת דוגמה.

## תרגיל

,

# משפט

יהיו V מ"ו, בסיס ו הרמיטית(או סימטרית). אם ורק אם  
 מגדירה מכפלה פנימית על V.  
(רמז: ⬄ )

## הערה

של ביחס לS.

## הוכחה

תרגיל! רמז:

# משפט ריס(F. Riesz)

יהי V עם . נגדיר העתקה ע"י: לכל , לכל .  
אזי i הוא איזומורפיזם.

## הערה

אם אזי זה לא מספיק. אם V הוא מרחב של Hilbert אזי המשפט מתקיים.

## נוכיח את המשפט רק ל

i היא לינארית:. כלומר לכל מתקיים

*: אם כך ש ⇦ לכל אזי , בפרט: ⇦*

*בגלל ש(כי ) אזי i היא גם על ⇦ i איזומורפיזם.*

## בפרט

לכל קיים כך ש לכל .

## הוכחה 2

בגלל קיים בסיס א"נ: . יהי . נגדיר .  
לכל מתקיים

v הוא יחיד: כי v מוגדרת ע"י ערכים

## תרגיל

למה: יהי כך ש. לכל , בסיס של V. אזי

רמז: לכל

# דוגמה

. הוכחנו שכל פונקציונאל הוא מהצורה: ,